Varianta 82

SUBIECTUL I

a) $AB = 1$.
b) $a = 0$
c) $AC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}},\ BC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \Rightarrow$ Triunghiul ABC este isoscel.
d) $AC = BC = AB = 1 \Rightarrow$ Triunghiul ABC este echilateral.
e) $S = \frac{1}{2}$.
f) $\bar{z} = 4 + 2i$.

SUBIECTUL II

1.
a) Valoarea determinantului este zero.
b) $p = \frac{1}{2}$.
c) $x = \frac{1}{4}$.
d) $\log_2 5^3 \cdot \log_5 2 = 3$.
e) $C_5^5 - C_5^4 = -4$.

2.
a) Calcul direct.
b) $f'(x) = \frac{-2x - 3}{\left(x^2 + 3x + 2\right)^2}$.
c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{7}{144}$.
d) $\int_2^3 f(x)dx = \ln \frac{16}{15}$.
e) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 f(x) = 1$.

SUBIECTUL III

a) $I_2^2 = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$.
b) $P^2 = I_2$ şi $Q^2 = I_2 \Rightarrow P \in G$ şi $Q \in G$.
c) $P \cdot Q = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $(P\cdot Q)^2=\begin{pmatrix}41 & 48\\ -6 & -7\end{pmatrix}\neq I_2 \Rightarrow P\cdot Q\notin G$.

e) Deoarece $A_n^2=I_2, \forall n\in \mathbf{N} \Rightarrow A_n\in G,\ \forall n\in \mathbf{N}$.

f) Din **e)** $\Rightarrow A_n\in G,\ \forall n\in \mathbf{N}$ şi $A_n\neq A_m$, pentru $n\neq m \Rightarrow$ G este infinită.

g) Ştim că orice matrice de ordinul doi, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ satisface relaţia:

$A^2-(a+d)A+\det(A)\cdot I_2=O_2 \Rightarrow (a+d)A=2I_2 \Rightarrow a=d=1$ sau $a=d=-1 \Rightarrow A=I_2$ sau $A=-I_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(x+1)=x^2+x+1\ \forall x\in \mathbf{R}$.

b) Calcul direct.

c) $f'(x)=2x-1$.

d) $f(x)\geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2-x+1\geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow (2x-1)^2\geq 0$ .Evident.

e) $a_n \overset{b}{=} \frac{1}{3}\cdot\frac{f(3)}{f(2)}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{f(4)}{f(3)}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{f(5)}{f(4)}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{2f(n+1)}{f(2)n(n+1)}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+2}{3n^2+3n}=\frac{2}{3}$.

g) Deoarece: $\int_0^n f(x)dx=\int_0^n x^2dx-\int_0^n xdx+\int_0^n dx=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+n$,

limita cerută devine: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+6n}{6n^3}=\frac{1}{3}$.